Q-polynomial Association Schemes and Q-polynomial Coherent Configurations

著者	須田 庄
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	情博第470号
URL	http://hdl.handle.net/10097/51149

氏名（本籍地）	須田　庄
学位の種類	博　士（情報科学）
学位記番号	情　博　第　470　号
学位授与年月日	平成22年　3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）情報基礎科学専攻
学位論文題目	Q-polynomial Association Schemes and Q-polynomial Coherent Configurations （Q-多項式スキームとQ-多項式コヒアラント配置）
論文審査委員	（主査）東北大学教授　宗政　昭弘 東北大学教授　尾畑　伸明　　国際基督教大学教授　鈴木　寛 東北大学准教授　今井　秀雄

論文内容の要旨

第1章　序論

本論文では主に Q-多項式アソシエーションスキームに関して研究する．アソシエーションスキームとは有限可移置換群の Centralizer ring の満たす性質を公理化した組合せ論的な対象である．１９７３年, Delsarte により P-多項式アソシエーションスキームの双対的な概念として, Q-多項式アソシエーションスキームの概念が定義された．Delsarte は P-多項式スキーム上でコードを, Q-多項式スキーム上でデザインを統一的に論じており, これらの研究はいわゆるアソシエーションスキーム上の Delsarte 理論として知られている．

一方, １９７７年, Delsarte, Goethals, Seidel によって球面上の概念が導入された．これは, Q-多項式スキーム上に対して定義されたデザインの球面上における類似であり, いわゆる球面上の Delsarte 理論として知られている．アソシエーションスキーム上, または球面上の t-デザイン, s-距離集合 X に対して, 最も基本的かつ重要な定理として次が知られている：

Theorem 1　$t \geq 2s-2$ を満たせば, X は Q-多項式スキームの構造を持つ．

２００３年になって Brouwer, Godsil, Koolen, Martin によって P-多項式スキームの部分集合に width が, Q-多項式スキームの部分集合に dual width が定義された．彼らの研究において d-クラスの Q-多項式スキームの dual width w^*, degree s を持つ部分集合に対して, 次が知らている：

$w^* + s \geq d$ が成り立つ．更に, $w^* + s = d$ を満たせば, Q-多項式スキームの構造を持つ．

これらの研究に端を発して, Q-多項式スキームに関する研究を行う．

第 2 章　球面上のデザインから得られるコヒアラント配置と三重正則アソシエーションスキーム

第 2 章では, 有限個の球面上のデザインがコヒアラント配置となるための十分条件について考察する. Theorem 1 は一つのデザインに関する定理だが, この定理を一般化することで, ある条件を満たす有限個のデザインが, アソシエーションスキームの一般化である, コヒアラント配置の構造を持つことが示される. この定理は第 3 章, 第 4 章で重要な役割を果たすことを言及しておく. また, ここで得られた定理を用いて, 対称なアソシエーションスキームが三重正則と呼ばれる強い組合せ論的性質をもつための十分条件を与えた. この判定条件を用いて, 球面上の tight 4-, 5-, 7-デザイン, 実 MUB から得られるアソシエーションスキーム, また $a_1^* = 0$ を満たす linked systems of symmetric designs から得られるアソシエーションスキームが三重正則であることが分かった.

本章の結果は, strongly regular graph に対して適用されていた手法を対称なアソシエーションスキームに一般化をした点が新しいといえる.

第 3 章　ある Q-多項式スキームの正則性の特徴付け

第 3 章では, 実 MUB, linked systems of symmetric designs から得られるアソシエーションスキームについて考察する. まず, これらは Q-多項式スキームであることに言及しておく. 第 2 章で得られた結果の一つである, $a_1^* = 0$ を満たす linked systems of symmetric designs から得られるアソシエーションスキームが三重正則という命題の逆, すなわち, linked systems of symmetric designs から得られるアソシエーションスキームが三重正則であれば $a_1^* = 0$ を示した.

実 MUB とは d 次元実ユークリッド空間の正規直交基底の集まりで, 互いに異なる基底の任意の二つの元の内積の絶対値が $1/\sqrt{d}$ となるもののことである. 実 MUB の正規直交基底の個数を f とすると, $f \le d/2+1$ となることが知られており, d が 4 の冪のときには等号が成立する例が構成されている. 実 MUB に対しては, linked systems of symmetric designs の結果を用いて, $f = d/2+1$ を満たすことと, 実 MUB から得られるアソシエーションスキームが四重正則ということが同値であることを示した. ここで, $f = d/2+1$ という条件は $c_2^* = 2d/(d+2)$ というクライン数に関する条件と同値であり, これは第 6 章に関連する.

本章では, ある Q-多項式スキームにおいて, クライン数に関する条件と組合せ論的条件の同値性に関して述べたといえる.

第 4 章　Q-多項式コヒアラント配置

第 1 章では, Theorem 1 を一般化することで有限個のデザインがコヒアラント配置となる十分条件を得た. 第 4 章では, その十分条件のうち, 特別な場合において得られるコヒアラント配置が代数的に非常に特別な性質を持つことを示す. 本章ではその性質をコヒアラント配置の "Q-多項式" と定義していく. コヒアラント配置に Q-多項式を定義するためには, そのコヒアラント配置の隣接行列で生成されるコヒアラント代数が特別な性質を有することを仮定する（dual basis の存在を仮定する）. まず, 可換アソシエーションスキームの場合と同様にして, そのような特別な基底を持つコヒアラント代数のパラメータ, 交差数, クライン数, 各ファイバー間の第一固有行列, 第二固有行列の四者の間の関係式を導く. コヒアラント配置に課している仮定から非常に自然なパラメータの関係式が得られることが分かる. アソシエーションスキームにおいて Q-多項式という性質を特徴付ける, クライン数, 第二固有行列, 原子冪等元に関する同値条件が知られている. コヒア

ラント配置においては，基底に関する条件を課しておくことで，クライン数，ファイバー間の第二固有行列，dual basis に関する同値条件が，アソシエーションスキームの場合と全く同様にして示される．よって，その同値条件のうち，少なくとも一つを満たすコヒアラント配置を Q-多項式コヒアラント配置と定義する．Q-多項式コヒアラント配置の例として，有限個のデザインから得られるコヒアラント配置，$f = d/2 + 1$ を満たす実 MUB，2元体上のハミングスキームが挙げられる．

第5章　多項式スキームの部分集合の新しいパラメーターについて

第5章では，P-多項式スキームの部分集合に “zero interval”，Q-多項式スキームの部分集合に “dual zero interval” という新しいパラメータを定義する．一般に d-クラスの対称なアソシエーションスキームの部分集合に対して，長さが $d+1$ の非負の有限実数列 inner distribution, dual inner distribution が定義される．1973年，Delsarte は P-多項式スキームの部分集合に minimum distance，Q-多項式スキームの部分集合に design を定義した．Delsarte は inner distribution, dual inner distribution の初めに 0 がどれだけ並ぶか，および初めに並ぶ 0 の個数が十分大きいときにはその部分集合は完全正則符号，もしくは Q-多項式スキームの構造を持つことを示した．

さらに 2003 年には Brouwer 等は P-多項式スキームの部分集合に width，Q-多項式スキームの部分集合に dual width を定義した．Brouwer 等は inner distribution, dual inner distribution の終わりに 0 がどれだけ並ぶか，および終わりに並ぶ 0 の個数が最も大きいときには，Delsarte の結果と同様，その部分集合は完全正則符号，もしくは Q-多項式スキームの構造を持つことを示した．

本章では inner distribution, dual inner distribution の項に（初め，終わりに関係なく）連続して 0 がどれだけ並ぶか，および並ぶ 0 の個数が十分大きいときにはその部分集合は完全正則符号，もしくは Q-多項式スキームの構造を持つことを示した．Brouwer 等の結果の証明方法を若干一般化することで，その系として本結果，および Brouwer 等の結果を示すことに成功した．しかし，Delsarte によって得られた結果までを含む形では一般化に成功してはいない．

また，dual zero interval の概念の球面上での類似を考えることで，spherical dual zero interval という概念を定義した．この概念は非負整数の組 (w, t) で表わされるが，$w = 0$ のときは球面上のデザインと一致することが直ちに分かる．ここでは dual zero interval での手法をそのまま適用して，s-距離集合，spherical dual zero interval (w, t) に対して，$t \geq 2s - 1$ を満たせば Q-多項式スキームとなる定理を導いた．しかし，この定理の仮定を満たす具体例は $w = 0$ を除いて現在のところ知られていない．

第6章　Q-多項式スキームから得られる球面上のデザインについて

Theorem 1 では，ある条件の下では球面上のデザインから得られるアソシエーションスキームは Q-多項式スキームであることを意味している．一般に対称なアソシエーションスキームに対しては，各列が相異なる原子冪等元に対して，それをグラム行列となるように球面上に忠実に実現することができる．では，Q-多項式スキームを E_1 で球面上に埋め込んだ際，どのような球面上のデザインが得られるかについて考察することは非常に自然と思われる．第6章では，Q-多項式スキームを E_1 で球面に埋め込んだとき，t-デザインとなる必要十分条件を Q-多項式スキームのクライン数で完全に与えた．また，P かつ Q-多項式スキームを埋め込んで t-デザインが得られたとすると，$t \leq 8$ となることを示した．これは P かつ Q-多項式スキームの girth が有限の値になる，という結果の重複度における類似とみなせる．

論文審査結果の要旨

群の作用を公理化したアソシエーションスキームは、1973 年にデルサルトによってその双対性が確立されるとともに符号理論とデザイン理論を統一的に扱う枠組みとして代数的組合せ論の重要な位置を占めてきた。特に Q 多項式スキームの理論は組合せ論のみならず数学の他の分野とも密接な関連があるが、 P 多項式スキームに比べて組合せ論的な扱いが難しい Q 多項式スキームの理論は未整備の所が多く、今後の研究が待たれる。著者は Q 多項式スキームとその球面への自然な埋め込みに関する研究に取り組んできた。本論文は、その成果をまとめたもので、全編 6 章からなる。

第 1 章は序論であり，本研究の背景及び目的を述べている。

第 2 章では、ある種の球デザインから得られる Q 多項式スキームが三重正則となることを示している。タイトな球デザインのみならず、実 MUB など興味深い例もこの性質を持つことが初めて明らかにされた。この成果が第 3 章以降の新たな理論の発展へのきっかけとなっている。

第 3 章では、第 2 章で示されたことのある種の逆の主張が示されている。すなわち、三重正則性や、より強い、四重正則性を持つ場合が第 2 章で言及された場合に限ることが示されている。

第 4 章では Q 多項式スキームの概念を一般化した、 Q 多項式コヒアラント配置の概念を導入し、 Q 多項式スキームにおけるデザインや、球面におけるデザインからその実例が得られることを示している。

第 5 章では 1973 年にデルサルトによって導入された、 P 多項式スキームや Q 多項式スキームの部分集合に付随したパラメータと、2003 年にブラウアーらにより導入されたパラメータを統合する概念を導入している。零区間、双対零区間と呼ばれるものがそれで、その長さの上界を与えるとともに上界に近い場合に得られる帰結を述べている。

第 6 章では P かつ Q 多項式スキームから得られる球デザインは、その強さが高々 8 である、という結果が示されている。

以上要するに本論文は、 Q 多項式スキームに関し、球面への埋め込みを用いて組合せ論的対象の強い正則性を導き、新たな概念を導入することにより過去の成果を統合するという画期的な成果を含んでおり情報基礎科学および数学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は、博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。